Exercices sur base du chapitre 1 : Graphiques et fonctions
Série 1 : correction

exercice 1 :

1) $y = 2x^3 + 5x^2 - x - 4$

Cette fonction est définie pour toute valeur de x.

dom f = $\mathbb{R}$.

2) $y = \dfrac{1-x}{2-x}$

Cette fonction est définie lorsque 2 – x n'est pas nul, c'est-à-dire pour $x \neq 2$.

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3) $y = \sqrt{x-1}$

Cette fonction est définie pour $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \geq 1$.

dom f = $[1, +\infty[$.

4) $y = \dfrac{x}{x^2 + 14x + 13}$

Cette fonction est définie lorsque $x^2 + 14x + 13$ n'est pas nul.

Recherchons les solutions de $x^2 + 14x + 13 = 0$:

$\Delta = 14^2 - 4.13 = 196 - 52 = 144$

$x' = \dfrac{-14+12}{2} = -1$ et $x'' = \dfrac{-14-12}{2} = -13$.

dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-13, -1\}$.

5) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{2x+3}}$

Cette fonction est définie lorsque 2x + 3 est strictement positif :

$2x + 3 > 0 \iff x > -\dfrac{3}{2}$.

dom f = $\left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

6) $y = \sqrt[3]{x^2 + x - 2}$

Une racine d'indice impair est toujours définie, quel que soit le signe du radicand.

dom f = $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) $\sqrt{-x^2-5x-6}$

Cette fonction n'existe que si $-x^2-5x-6 \geq 0$.

Recherchons les racines de $-x^2-5x-6$:

$\Delta = (-5)^2 - 4.(-1).(-6) = 25 - 24 = 1$

$x' = \dfrac{5+1}{-2} = -3$ et $x'' = \dfrac{5-1}{-2} = -2$.

Dès lors, nous avons :

x		-3		-2	
$-x^2-5x-6$	$-$	0	$+$	0	$-$

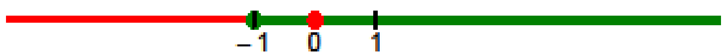
Nous en concluons : **dom f = [– 3, – 2]**.

2) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

Cette fonction est définie si $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ et si $x \neq 0$

Elle n'est donc pas définie si $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou si $x = 0$

Représentons en rouge les valeurs de x pour lesquelles f(x) n'existe pas (donc en vert les valeurs que x peut prendre pour que f(x) existe):



dom f = [– 1, + ∞[\ {0}.

3) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

Posons les conditions d'existence :

$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ et $x + 2 \geq 0$ et $3x - 2 \geq 0$.

Cette fonction n'est donc pas définie si

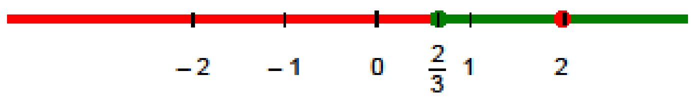
$x - 2 = 0$ (1) ou $x + 2 < 0$ (2) ou $3x - 2 < 0$ (3)

(1) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

(2) $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

(3) $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$

Représentons graphiquement ces conditions :



Donc : **dom f** $= \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[\setminus \{2\}$.

4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}$

Posons les conditions d'existence :

$$\begin{aligned} x \in \text{dom } f &\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \neq 0 \text{ et } x - 3 \geq 0 \text{ et } 1 - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - x \neq 0 \text{ et } x - 3 \geq 0 \text{ et } 1 - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \text{ et } 1 - x > 0 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est donc pas définie si :

$x - 3 < 0$ (1) ou $1 - x \leq 0$ (2)

(1) $x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

(2) $1 - x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$

Représentons graphiquement :

Constatation : aucun réel n'échappe à ces conditions.

dom f = $\varnothing$.

5) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}}$

Condition d'existence : $\sqrt[3]{x^2 - x} \neq 0$ (pas d'autre condition car la racine cubique est définie quel que soit le signe du radicand).

Cette fonction n'est donc pas définie si $x^2 - x = 0$.

Or : $x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = 1$.

Donc : **dom f = $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$**.

6) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2x^2 + 4x}$

Conditions d'existence : $2x^2 + 4x \neq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$

Cette fonction n'est donc pas définie si $2x^2 + 4x = 0$ (1) ou $1 - x^2 < 0$ (2)

(1) $2x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = -2$.

(2) $1 - x^2 < 0$

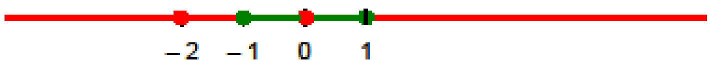
$1 - x^2$ est une fonction du second degré dont les racines sont -1 et 1.

Nous avons donc :

x		-1		1	
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

D'où : $1 - x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1$ ou $x > 1$

Graphiquement :



dom f = [– 1, 1] \ {0}.

Exercice 3 :

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x}}$

$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x} < 0$ **ou** $-x^2 + 4x = 0$

Étudions le signe de la fraction :

- racines de $x^2 + x - 2$: $\Delta = 1^2 - 4.(-2) = 1 + 8 = 9$

  d'où $x' = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $x'' = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

- racines de $-x^2 + 4x$: $-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

- Nous avons donc le tableau :

x		-2		0		1		4	
$x^2 + x - 2$	+	0	–	–	–	0	+	+	+
$-x^2 + 4x$	–	–	–	0	+	+	+	0	–
fraction	–	0	+	X	–	0	+	X	–

Le domaine étant l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fraction est supérieure ou égale à 0, nous avons : **dom f = $[-2, 0[\cup [1, 4[$.**

2) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$

$x \notin \text{dom } f \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$ (1) **ou** $-x^2 + 4x \leq 0$ (2)

(1)

x		-2		1	
$x^2 + x - 2$	+	0	–	0	+

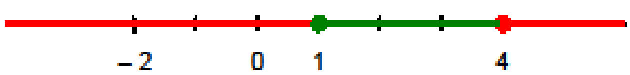
D'où : $x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow \mathbf{-2 < x < 1}$

(2)

x		0		4	
$-x^2 + 4x$	–	0	+	0	–

D'où : $-x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x \leq 0}$ **ou** $\mathbf{x \geq 4}$

Graphiquement :



D'où : **dom f = $[1, 4[$.**

exercice 4 :

2

3. a) $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+4x+4}}$

$$x \in \text{dom } f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\sqrt{x^2+4x+4} \neq 0 \\ x^2+4x+4 \geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+2)^2 \neq 0 \\ (x+2)^2 \geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 > 0$$

Or $(x+2)^2$ est toujours positif ou nul, il faut donc seulement exclure la valeur -2 qui le rend nul.

D'où : **dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.**

b) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{-2x+1}}$

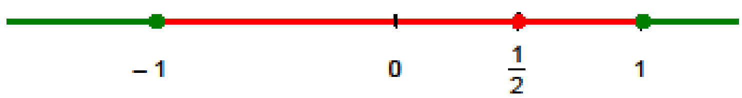
$x \in \text{dom } f \quad \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \quad (1) \quad$ et $\quad -2x+1 \neq 0 \quad (2)$

(1) $\quad x^2-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \leq -1 \quad$ ou $\quad x \geq 1$

En effet on a le tableau de signes :

		-1		1	
x^2-1	+	0	–	0	+

(2) $\quad -2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$



dom f = $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

c) $y=\sqrt{x^2+5x+7}$

$x \in \text{dom } f \quad \Leftrightarrow \quad x^2+5x+7 \geq 0$

$\Delta = 5^2-4 \cdot 7 = 25-28 = -3 < 0$

x^2+5x+7 n'admet pas de racines et est donc **toujours positif.**

D'où : **dom f = $\mathbb{R}$.**

d) $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{\sqrt{x^2+5}+x-5}$

$x\in \text{dom } f \quad \Leftrightarrow -x^2+2x+3\geq 0 \;\; (1) \quad \text{et} \quad x^2+5\geq 0 \;\; (2) \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+5}+x-5\neq 0 \;\; (3)$

(1) $-x^2+2x+3\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$

En effet on a le tableau de signes :

		-1		3	
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

(2) $x^2+5\geq 0$

Cette condition est toujours réalisée puisque x^2+5 est toujours positif.

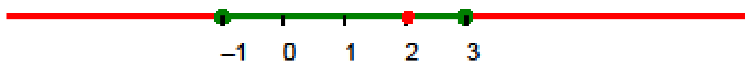
(3) $\sqrt{x^2+5}+x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+5}=5-x$

$\Rightarrow \quad x^2+5=25-10x+x^2$

$\Leftrightarrow \quad 10x=20$

$\Leftrightarrow \quad x=2 \qquad$ (et 2 vérifie bien (3))

On a donc



dom f = $[-1,\ 3]\setminus\{2\}$.

e) $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^4-3x^3-x+3}$

$x\in \text{dom } f \quad \Leftrightarrow x^4-3x^3-x+3\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(x-3)-(x-3)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x^3-1)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x-1)(x^2+x+1)\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x-3\neq 0 \text{ et } \quad x-1\neq 0 \text{ et } \quad x^2+x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x\neq 3 \quad \text{ et } \quad x\neq 1$

la condition $x^2+x+1\neq 0$ est toujours vérifiée car $\Delta<0$.

On a donc

dom f = $\mathbb{R}\setminus\{1, 3\}$